

EJERCICIOS UNIDAD 7. FUNCIONES . Asíntotas de funciones

Estudiar las asíntotas de las siguientes funciones, y dibuja la gráfica en su aproximación a las mismas.

$$1) f(x) = \frac{1+2x}{x}$$

1. Asíntotas verticales.

Función racional con asíntota vertical en el eje Y (recta $x = 0$), pues este valor anula el denominador.

Vemos la posición de la curva respecto a la asíntota:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1+2x}{x} = \frac{1}{0} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1+2x}{x} = \frac{1}{-0} = -\infty \end{cases}$$

2. Asíntotas horizontales.

Sí hay pues el grado del numerador es igual al del denominador.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+2x}{x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = 2 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1+2x}{x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = 2$$

Por ser función racional, la recta $y = 2$ es asíntota horizontal en $+\infty$ y en $-\infty$.

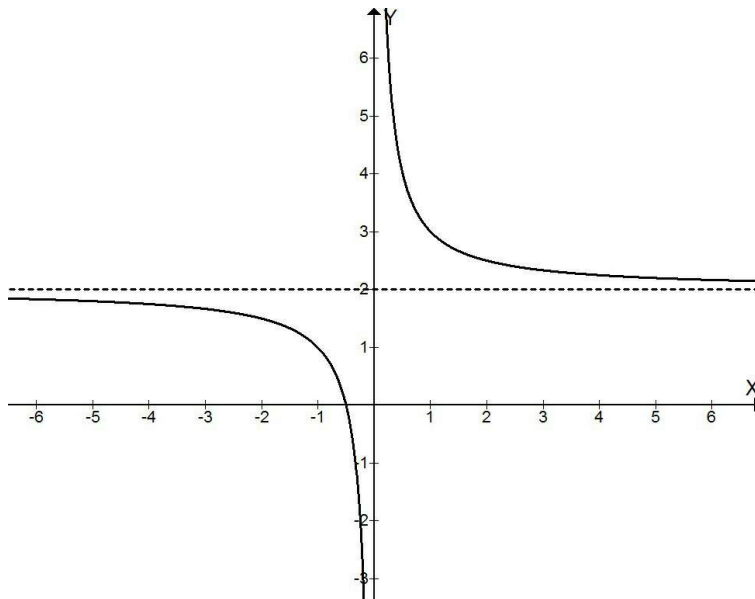
Para saber si las ramas de la gráfica se acercan por encima o por debajo a la asíntota horizontal, calculamos:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1+2x}{x} - 2 \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0^+ \Rightarrow \text{la curva está por encima}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1+2x}{x} - 2 \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0^- \Rightarrow \text{la curva está por debajo}$$

3. Asíntotas oblicuas.

No hay pues asíntotas horizontales y oblicuas son excluyentes.



$$2) f(x) = \frac{x^2 - x + 6}{x - 3}$$

1. Asíntotas verticales.

Función racional con asíntota vertical en la recta $x = 3$, pues este valor anula el denominador.

Vemos la posición de la curva respecto a la asíntota:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2 - x + 6}{x - 3} = \frac{12}{0} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 - x + 6}{x - 3} = \frac{12}{-0} = -\infty \end{cases}$$

2. Asíntotas horizontales.

No hay pues el grado del numerador es mayor que el del denominador.

Aun así, vemos ahora el comportamiento de la gráfica en el infinito.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x + 6}{x - 3} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - x + 6}{x - 3} = -\infty$$

3. Asíntotas oblicuas.

Sí hay pues el grado del denominador es uno menor que el del numerador.

$$m_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x + 6}{x^2 - 3x} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = 1$$

$$m_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - x + 6}{x^2 - 3x} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = 1$$

$$n_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^2 - x + 6}{x - 3} - x \right] = (\infty - \infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^2 - x + 6 - x^2 + 3x}{x - 3} \right] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x + 6}{x - 3} \right) = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = 2$$

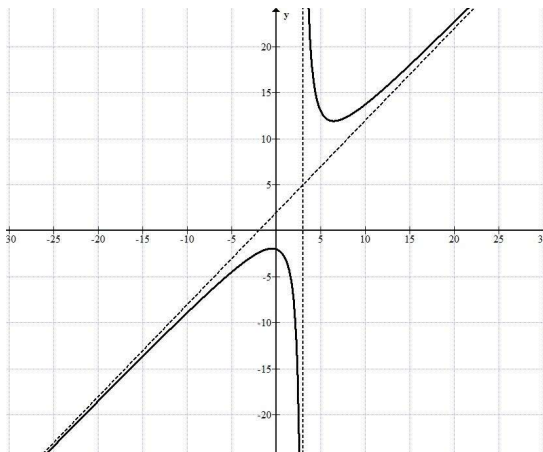
$$n_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{x^2 - x + 6}{x - 3} - x \right] = (\infty - \infty) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x + 6}{x - 3} \right) = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = 2$$

Luego la recta $y = x + 2$ es asíntota oblicua, y por ser la función racional, lo es en $+\infty$ y en $-\infty$.

Posicionamos la función con respecto a la asíntota:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^2 - x + 6}{x - 3} - (x + 2) \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{12}{x - 1} = 0^+ \Rightarrow \text{la curva está por encima}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{x^2 - x + 6}{x - 3} - (x + 2) \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{12}{x - 1} = 0^- \Rightarrow \text{la curva está por debajo}$$



$$3) f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 2x}$$

1. Asíntotas verticales.

Función racional con asíntotas verticales en las rectas $x = 0$ y $x = 2$, pues ambos valores anulan el denominador.

Vemos la posición de la curva respecto a la asíntota:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 2x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + 1}{x(x - 2)} = \frac{1}{-0} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 2x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 + 1}{x(x - 2)} = \frac{1}{+0} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 2x} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 + 1}{x(x - 2)} = \frac{5}{0} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 2x} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 + 1}{x(x - 2)} = \frac{5}{-0} = -\infty \end{array} \right.$$

2. Asíntotas horizontales.

Sí hay pues el grado del numerador es igual al del denominador.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 2x} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = 1 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 2x} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = 1$$

Por ser función racional, la recta $y = 1$ es asíntota horizontal en $+\infty$ y en $-\infty$.

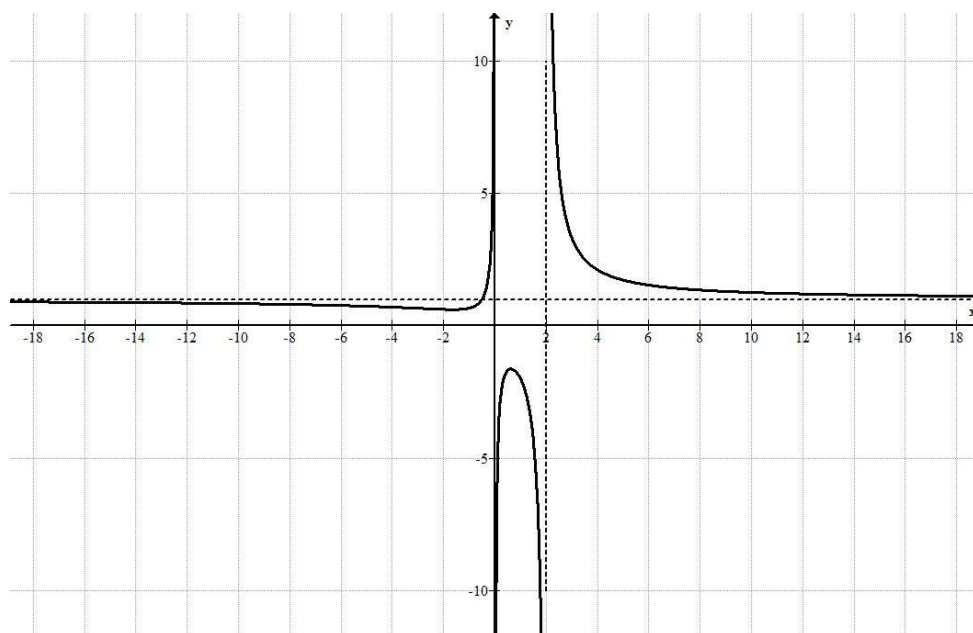
Vemos la posición de la curva respecto a la asíntota horizontal:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 2x} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 1}{x^2 - 2x} = 0^+ \Rightarrow \text{la curva está por encima}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 2x} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + 1}{x^2 - 2x} = 0^- \Rightarrow \text{la curva está por debajo}$$

3. Asíntotas oblicuas.

No hay pues asíntotas horizontales y oblicuas son excluyentes.



5) $f(x) = \sqrt{x^2 + 3}$

Función irracional, que además es par ya que $f(x) = f(-x)$. Su dominio es $\mathbb{R}$ porque el radicando es siempre positivo.

1. Asíntotas verticales.

No tiene porque $\nexists a \in \mathbb{R} / \lim_{x \rightarrow a} \sqrt{x^2 + 3} = +\infty$

2. Asíntotas horizontales.

Tampoco, pero vemos el comportamiento de la gráfica en el infinito:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 3} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 3} = +\infty$$

3. Asíntotas oblicuas.

En este caso obtenemos dos pendientes diferentes en ∞ y $-\infty$.

$$m_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 3}}{x} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = 1$$

$$m_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 3}}{x} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = -1$$

y para cada una de ellas obtenemos su respectiva ordenada en el origen:

$$\begin{aligned} n_1 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{x^2 + 3} - x] = (\infty - \infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 3} - x)(\sqrt{x^2 + 3} + x)}{\sqrt{x^2 + 3} + x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 3 - x^2}{\sqrt{x^2 + 3} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{\sqrt{x^2 + 3} + x} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n_2 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow -\infty} [\sqrt{x^2 + 3} + x] = (\infty - \infty) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 3} + x)(\sqrt{x^2 + 3} - x)}{\sqrt{x^2 + 3} - x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 3 - x^2}{\sqrt{x^2 + 3} - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{\sqrt{x^2 + 3} - x} = 0 \end{aligned}$$

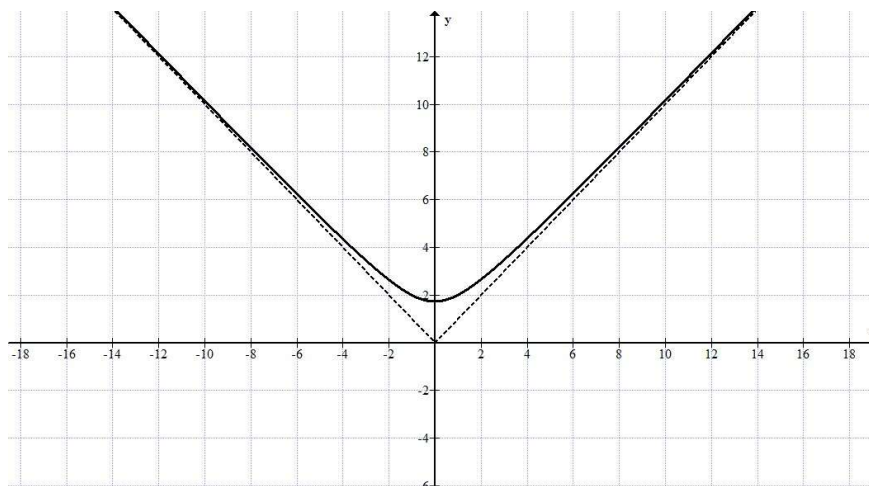
Luego las recta $y = x$ e $y = -x$ son asíntotas oblicuas.

Las dos asíntotas han de ser simétricas respecto al eje Y porque la función es par.

Vemos ahora la posición de la curva respecto de las asíntotas (basta mirarlo en una):

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{x^2 + 3} - x] = 0^+ \Rightarrow \text{la curva está por encima}$$

Como la función es par, sucederá lo mismo para $x \rightarrow -\infty$



$$6) f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 - 9} & \text{si } x \leq -3 \\ -x^2 + 3 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

Función a trozos. El primer tramo es irracional, el segundo es cuadrático

Su dominio son todos los valores reales menos los que hacen negativo el radicando:

$$x^2 - 9 > 0 \Rightarrow (x + 3)(x - 3) > 0 \text{ de donde obtenemos } D(f) = (-\infty, -3] \cup (3, +\infty)$$

1. Asíntotas verticales.

No tiene.

2. Asíntotas horizontales.

Tampoco, pero vemos el comportamiento de la gráfica en el infinito:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^2 + 3) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 - 9} = +\infty$$

3. Asíntotas oblicuas.

Nuevamente obtenemos dos pendientes diferentes en $+\infty$ y $-\infty$.

$m_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2 + 3}{x} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = -\infty$ Tampoco hay asíntota oblicua para $x \rightarrow +\infty$, es una rama parabólica

$$m_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = -1$$

$$\begin{aligned} n_2 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow -\infty} [\sqrt{x^2 - 9} + x] = (\infty - \infty) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - 9} + x)(\sqrt{x^2 - 9} - x)}{\sqrt{x^2 - 9} - x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 9 - x^2}{\sqrt{x^2 - 9} - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-9}{\sqrt{x^2 - 9} - x} = 0 \end{aligned}$$

Luego la recta $y = -x$ es asíntota oblicua para $x \rightarrow -\infty$.

Vemos ahora la posición de la curva respecto de la asíntota:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [\sqrt{x^2 - 9} + x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-9}{\sqrt{x^2 - 9} - x} = 0^- \Rightarrow \text{la curva está por debajo de la asíntota.}$$